

Filière : **Licence d'éducation : Enseignement Secondaire Mathématiques - LEM**

Module : **Mesures et Intégration**

Coordonnateur du module : **Zguaid Khalid**

Semestre : **5**

Année : **2025/2026**

OBJECTIFS DU COURS :

Objectif Général : Le cours a pour objectif de familiariser les étudiants avec les concepts fondamentaux de la théorie de la mesure et de l'intégration, en particulier la mesure de Lebesgue et l'intégration des fonctions mesurables. Il vise à fournir une compréhension approfondie des espaces mesurables, des mesures positives, des espaces \mathcal{L}_p et L_p et des théorèmes de convergence importants.

Objectifs Spécifiques :

- Comprendre les concepts de clans, tribus et tribus de Borel.
- Maîtriser les propriétés des fonctions mesurables et leur approximation.
- Appréhender les mesures positives et leurs propriétés fondamentales.
- Étudier la mesure de Lebesgue et ses applications.
- Construire l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions positives et les fonctions intégrables.
- Appliquer les théorèmes de convergence monotone et dominée.
- Explorer les espaces \mathcal{L}_p et L_p et leurs propriétés.
- Utiliser les théorèmes de Fubini et de changement de variables pour les mesures produit.

Méthodes Pédagogiques :

- Cours magistraux.
- Travaux dirigés.
- Évaluations continues et examen final.
- Présentations (si le temps le permet)

Supports Du Cours :

- La présentation « en beamer » donnée

Compétences Générales Visées :

- **Analyse et résolution de problèmes :** Capacité à appliquer les concepts de la théorie de la mesure et de l'intégration à divers problèmes mathématiques.
- **Rigueur scientifique :** Développement d'une approche méthodique et rigoureuse dans la résolution des problèmes.
- **Pensée critique :** Capacité à analyser, interpréter et critiquer des résultats mathématiques.
- **Communication :** Aptitude à expliquer clairement des concepts complexes et à présenter des solutions de manière structurée.

Le volume horaire global de ce module est de 50 heures, soit 25 séances, réparties en 13 séances de cours et 10 séances de travaux pratiques, plus 2 séances d'évaluation. La répartition des 13 séances de cours est la suivante :

Séance 1: Tribus

Contenu :

- Tribus (σ -Algèbres de Boole) : Définition et propriétés
- Tribu engendrée par une classe de parties
- Exemples de tribus : Tribu trace (ou induite), Tribu image réciproque, Tribu induite par une application et Tribu produit.

Travail à faire :

- Se familiariser avec la notion de tribu.

Séance 2 : Tribus et Mesures

Contenu détaillé :

- Tribu de Borel dans \mathbb{R} et \mathbb{R}^n
- Droite achevée et tribu de Borel dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{R}}^+$
- Mesures positives : Définitions et exemples

Travail à faire :

- Réviser ce qui a été fait.

Séance 3 : Mesures

Contenu détaillé :

- Mesures positives : Définitions et exemples (suite)
- Propriétés élémentaires des mesures positives

Travail à faire :

- Lire la section correspondante et compléter les exercices

Séance 4 : Mesure de Lebesgue

Contenu détaillé :

- Négligeables
- Complétion de mesures
- Mesures de Borel et de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$: Définition et propriétés

Travail à faire :

- S'habituer à la mesure de Lebesgue

Séance 5: Fonctions mesurables

Contenu détaillé :

- Définitions et généralités des applications mesurables
- Fonctions mesurables à valeurs dans \mathbb{R}

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante

Séance 6 : Fonctions mesurables**Contenu détaillé :**

- Fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\overline{\mathbb{R}}^+$
- Fonctions étagées
- Approximation des fonctions mesurables

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante

Séance 7 : Intégrale « de Lebesgue » des fonctions mesurables positives**Contenu détaillé :**

- Intégrale d'une fonction étagée mesurable positive
- Intégrale d'une fonction mesurable positive

Travail à faire :

- Se familiariser avec l'intégrale de Lebesgue.

Séance 8 : Intégrale « de Lebesgue » des fonctions mesurables positives**Contenu détaillé :**

- Intégrale d'une fonction mesurable positive (suite)
- Intégration des fonctions réelles

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante

Séance 9 : Théorèmes de convergence et Comparaison l'Intégrale de Riemann et de Lebesgue**Contenu détaillé :**

- Théorèmes de convergence et applications
- Comparaison entre l'Intégrale de Riemann et de Lebesgue

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante et compléter les exercices.

Séance 10 : Les espaces \mathcal{L}_p et L_p **Contenu détaillé :**

- Introduction des espaces fonctionnels de Lebesgue \mathcal{L}_p
- Construction des espaces fonctionnels de Lebesgue L_p
- Résultats généraux

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante et compléter les exercices.

Séance 11 : Mesure produit et Théorèmes de Fubini**Contenu détaillé :**

- Suite de la séance précédente concernant les espaces \mathcal{L}_p et L_p
- Définition et propriétés de mesure produit
- Introduction aux théorèmes de Fubini et de Fubini-Tonelli

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante et compléter les exercices.

Séance 12 : Mesure produit et Théorèmes de Fubini**Contenu détaillé :**

- Exemples et applications des théorèmes de Fubini et de Fubini-Tonelli
- Introduction du théorème de changement de variables
- Exemples d'application de ce théorème

Travail à faire :

- Réviser la section correspondante et compléter les exercices.

Séance 13 : Révision et préparation à l'examen final**Contenu détaillé :**

- Évaluation des connaissances acquises tout au long du cours
- Discussion des résultats et des concepts clés

Travail à faire :

- Préparer pour l'examen final.
- Réviser toutes les sections et compléter les exercices supplémentaires si nécessaire.

L'évaluation :

Examen final 60%

Contrôle continu 40%

- Exposé/Présentation du cas
- Participation
- Assiduité 5%